数　　学

（試験時間 100分 ／ 配点 200点）

（注）問題1はマークシートに解答しなさい。問題2，問題3は記述用解答欄（2ページ目）に，求める手順をわかりやすく説明すること。説明のない数字・式だけの場合，採点対象外とする。
・分数形で解答する場合，分数の符号は分子につけ，分母につけてはいけません。また，既約分数で答えなさい。

問題1　次の問いに答えよ。（マークシート方式）

(1) xy 平面において，曲線 C : $y = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x$ の $x = 0$ における法線 ℓ の傾きは **ア** であり，

曲線 C と法線 ℓ と直線 $x = 1$ と $x = -1$ で囲まれた部分を y 軸のまわりに1回転してできる立体の体積は $\frac{\boxed{イ}}{\boxed{ウ}}\pi$ である。

(2) $\left(\dfrac{\cos(\frac{7\pi}{4}) + i\sin(\frac{7\pi}{4})}{\cos(\frac{5\pi}{6}) + i\sin(\frac{5\pi}{6})}\right)^n = 1$ を満たす最小の自然数 n の値は **エオ** である。ただし，i は虚数単位である。

(3) 2次方程式 $x^2 - 2ax + 2a + 8 = 0$ の解 α と β が実数となるように実数 a の範囲を定める。

$\alpha^2 + \beta^2$ は $a =$ **カキ** のとき最小となる。

(4) 1個のサイコロを続けて投げ，3の倍数の目が8回出たところで終了する。ちょうど n 回投げて終了する確率を p_n とするとき，p_n を最大とする最小の n は **クケ** である。

(5) $\lim_{x \to -\infty}\left(\sqrt{9x^2 + 2x} + 3x\right) = \frac{\boxed{コサ}}{\boxed{シ}}$ である。

(6) 数列 $\{a_n\}$ が $a_1 = 1$，$a_{n+1} = a_n + n^2 + n$ を満たすとき，a_n が 2025 を超える最小の自然数 n は **スセ** である。

(7) ∠AOB を直角とする直角三角形 OAB がある。辺 OB を $a : b$ に内分する点を P，辺 OA を $b : (a + b)$ に内分する点を Q とし，BQ と AP の交点を R とする。OB = QA のとき，∠PRQ = **ソタチ**° である。ただし，a，b は正の実数とする。

(8) 実数で定義される関数 $f(x) = 4^x + 4^{-x} + 5(2^x - 2^{-x}) + 2$ の最小値は $\frac{\boxed{ツテ}}{\boxed{ト}}$ である。

(9) 5人の身長（cm）のデータ　158　176　162　180　164　の分散は **ナニ** である。

問題2　次の問いに答えよ。（記述式：求める手順をわかりやすく説明すること）

2つの放物線 $C_1 : y = x^2 + 2(k+2)x + 8k + 5$ と $C_2 : y = x^2 + 2(k-2)x - 8k + 5$ があり，直線 ℓ が2つの放物線の両方に接している。ただし，k は実数とする。次の問いに答えよ。

(1) 直線 ℓ の方程式を求めよ。

(2) C_1 と C_2 および直線 ℓ により囲まれた部分の面積を求めよ。

【問題2 記述解答欄】（(1) 直線 ℓ の導出過程と方程式 ／ (2) 交点の x 座標と定積分の計算過程）

問題3　次の問いに答えよ。（記述式：求める手順をわかりやすく説明すること）

m，n を整数とする。$2 \cdot 6^m = 2^n + 8$ を満たす (m, n) の組をすべて求めよ。

【問題3 記述解答欄】（$m \leq 0$ の場合の検討 ／ $m = 1$ の場合 ／ $m \geq 2$ における偶奇性の検討と結論）