2024年度 一般選抜 そっくり類題演習（TMPS医学館）

数　学（70分）

対象：杏林大学 医学部
配点：100点（大問I〜III）
解答形式：マークシート方式

【解答上の注意】
1. 問題の文中の [ア] , [イウ] などには、特に指示がないかぎり、数字（0〜9）、または負の符号（−）が入ります。
2. 分数形で解答する場合は、既約分数で答え、負の符号は分子につけ、分母につけてはいけません。
3. 根号を含む形で解答する場合は、根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えなさい。

I　[オ] の解答は該当する解答群の中から最も適当なものを一つ選べ。

原点を O とする座標平面上に円 $C : x^2 + y^2 = 20$ と直線 $\ell : y = ax - 6a + 2$ がある。ただし、a は実数の定数とする。

(a) 直線 ℓ は、その傾き a の値によらず定点 F ([ア] , [イ]) を通る。
定数 a を変化させたとき、円 C と接するような直線 ℓ は 2 本存在する。これらの直線と円 C との接点を P, Q とすると、短い方の弧 PQ の長さは $\sqrt{\text{[ウ]}}\,\pi$ である。

(b) 直線 ℓ が円 C と異なる 2 点で交わるとき、その交点を R, S とする。
線分 RS の中点を M とすると、ベクトル **OM** と **FM** の内積 **OM** · **FM** = [エ] が成り立つ。定数 a を変化させたとき、点 M が描く軌跡は、原点 O を通り [オ] の一部である。
また、定数 a を変化させた場合に $\triangle$ORS の面積が最大となるのは、原点と直線 ℓ の距離が $\sqrt{\text{[カキ]}}$ であり、 $a = \dfrac{\text{[ク]} \pm \text{[ケ]}\sqrt{\text{[コ]}}}{\text{[サシ]}}$ のときである。

[オ] の解答群：
① 点 F を焦点とする放物線　② 点 F を中心とする円　③ 線分 FO を直径とする円　④ 線分 FO を一辺にもつ正三角形の外接円
⑤ 点 F を焦点の 1 つとする楕円　⑥ 線分 FO を長軸とする楕円　⑦ 点 F を焦点の 1 つとする双曲線　⑧ 2 点 F, O を頂点とする双曲線

(c) 点 T(u, v) を直線 ℓ と楕円 $E : \dfrac{x^2}{20} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ の共有点とする。

$\boldsymbol{\alpha} = \left(\dfrac{u}{\sqrt{20}} , \dfrac{v}{2} \right)$, $\boldsymbol{\beta} = (a\sqrt{20} , -2)$ とおくと、点 T が直線 ℓ 上にあることから $\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta} =$ [ス] a − [セ] が成立する。また、点 T が楕円 E 上にあることから $|\boldsymbol{\alpha}| =$ [ソ] がいえる。
$-|\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{\beta}| \leq \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta} \leq |\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{\beta}|$ より、直線 ℓ と楕円 E が共有点をもつ a の範囲は [タ] $\leq a \leq \dfrac{\text{[チ]}}{\text{[ツ]}}$ とわかる。
a = [タ] のとき、直線 ℓ は楕円 E と点 ([テ] , [ト]) で接し、直線 ℓ が円 C によって切り取られる線分 RS の長さは [ナ] である。

II　[セ] の解答は該当する解答群の中から最も適当なものを一つ選べ。

実数 x の関数 $f(x) = \dfrac{1}{2} e^x + \dfrac{1}{2} e^{-x} - 1$ に対し、座標平面上の y = f(x) のグラフを C とする。また、実数の媒介変数 s を用いて次式で表される座標平面上の曲線を Γ とする（ただし e は自然対数の底）：

$$x = s - 1 + \frac{2}{e^{2s} + 1} , \qquad y = \frac{2e^s}{e^{2s} + 1} - 1 .$$

(a) $s = \log_e 2$ としたときの曲線 Γ 上の点を P とする。点 P の座標は $\left(\dfrac{\text{[アイ]}}{\text{[ウ]}} + \log_e 2 , -\dfrac{\text{[エ]}}{\text{[オ]}} \right)$ であり、この点における曲線 Γ の法線 ℓ の方程式は $y = \dfrac{\text{[カ]}}{\text{[キ]}} (x - \log_e 2) + \dfrac{\text{[ク]}}{\text{[ケ]}}$ とかける。

(b) x 座標が $\log_e 2$ である C 上の点を Q とする。点 Q の y 座標は $\dfrac{\text{[コ]}}{\text{[サ]}}$ であり、$f'(\log_e 2) = \dfrac{\text{[シ]}}{\text{[ス]}}$ が成り立つ。直線 ℓ は、点 Q における曲線 C の [セ] である。

[セ] の解答群： ① 法線　② 接線　③ 接線と $\pi/6$ の角度で交わる直線　④ 接線と $\pi/4$ の角度で交わる直線　⑤ 接線と $\pi/3$ の角度で交わる直線

(c) 原点 O と点 Q を結ぶ曲線 C の長さを d とすると、$d = \dfrac{\text{[ソ]}}{\text{[タ]}}$ であり、$\dfrac{d}{PQ} =$ [チ] が成り立つ。

III　テ と ト の解答は該当する解答群の中から最も適当なものをそれぞれ一つずつ選べ。

原点を O とする複素数平面上に 2 点 A(α), B(β) がある。ただし、i を虚数単位として

$$\alpha = -\sqrt{2} + \sqrt{2}\,i\,, \qquad \beta = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\,i \text{ であり、} \quad \gamma = \frac{\beta}{\alpha} \text{ とする。}$$

$\bar{z}$ は z に共役な複素数を表し、複素数 z の偏角 arg z の範囲は $0 \leqq \arg z < 2\pi$ とする。

(a) γ の実部を s、虚部を t とすると、

$$s = \frac{\sqrt{\boxed{ア}} + \sqrt{\boxed{イ}}}{\boxed{ウ}}\,, \qquad t = \frac{\sqrt{\boxed{ア}} - \sqrt{\boxed{イ}}}{\boxed{ウ}}\,, \qquad |\gamma| = \frac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}}\,, \qquad \arg\gamma = \frac{\pi}{\boxed{カキ}}$$

が成り立つ。
また、2 点 O, B を通る直線に関して点 A と対称な点 D(δ) について

$$\arg\frac{\delta - \alpha}{\beta} = \frac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}\pi \quad \text{が成り立ち、} \quad \delta = \alpha \times \frac{i + \sqrt{\boxed{コ}}}{\boxed{サ}} \quad \text{を満たす。}$$

(b) 自然数 n に対して γ^n が負の実数となる最小の n は **シス** である。
また、$|\gamma^{-n}| > 4096$ を満たす最小の n は **セソ** である。

(c) 2 点 O, A を通る直線に関して点 P(z) と対称な点を表す複素数を $\hat{z}$ と表記する。
自然数 n について、次の式で表される複素数平面上の点列 $\{z_n\}$ を考える。

$$z_1 = \beta\,, \qquad z_{n+1} = z_n + \gamma\,(\hat{z_n} - z_n)\,, \qquad \text{（ただし } n = 1, 2, 3, \cdots\text{）.}$$

点列 $\{z_n\}$ は複素数平面内で実軸と $\dfrac{\pi}{\boxed{タ}}$ の角度で交わる直線上に存在する。

また、$\arg z_n + \arg \hat{z_n} = \dfrac{\boxed{チ}}{\boxed{ツ}}\pi$ であり、z_n の極形式を考えると任意の自然数 n に対して

$\hat{z_n} =$ **テ** と表せるので、点列 $\{\hat{z_n}\}$ は次式を満たす。

$$\hat{z_{n+1}} = \hat{z_n} + \boxed{ト} \times (z_n - \hat{z_n})\,, \qquad \text{（ただし } n = 1, 2, 3, \cdots\text{）.}$$

自然数 n に対し $|\hat{z_n} - z_n|$ は、公比 **ナニ** s + **ヌ** の等比数列（ただし s は γ の実部）をなし、$\lim_{n\to\infty} |\hat{z_n} - z_n| =$ **ネ** となる。
以上から、

$$\lim_{n\to\infty} \arg z_n = \frac{\boxed{ノ}}{\boxed{ハ}}\pi\,, \qquad \lim_{n\to\infty} |z_n| = \frac{\boxed{ヒ}}{\boxed{フ}\,s}$$

とわかる。

テ の解答群：
① $i\,z_n$　② $-z_n$　③ $-i\,z_n$　④ $1/z_n$　⑤ $\bar{z_n}$
⑥ $i\,\bar{z_n}$　⑦ $-\bar{z_n}$　⑧ $-i\,\bar{z_n}$　⑨ $(\bar{z_n})^{-1}$　⓪ $i\,(\bar{z_n})^{-1}$

ト の解答群：
① γ　② iγ　③ (−γ)　④ (−iγ)　⑤ $\bar{\gamma}$　⑥ $i\bar{\gamma}$　⑦ $(-\bar{\gamma})$　⑧ $(-i\bar{\gamma})$

解説：ニックニ先生（TMPS医学館）　https://tmps-1489.com/coaching/mathematics/kyorin-2024/